12

СТАТИКА КОНСТРУКЦИЈА

Модул: Хидротехника и водно инжењерство околине, Саобраћајнице, Архитектонско инжењерство

– материјал за вежбе –

2024.

МЕТОДА СИЛА – СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ НОСАЧИ

Теорија првог реда

Основне једначине:

Статички неодређеним носачима називамо носаче у којима реакције ослонаца, моменти укљештења и силе у пресецима не могу да се одреде само из услова равнотеже тог носача, односно када је број непознатих већи од броја једначина.

$$z_0 + z_u + z_s + z_k + m > 2k + m\ ,$$

Тако да је разлика између броја непознатих и броја једначина, број статичке неодређености посматраног носача:

$$(z_0 + z_u + z_s + z_k + m) - (2k + m) = n$$

1. ПУНИ РАВАНСКИ НОСАЧИ – 2Д прорачунски модели:

Из услова равнотеже носача, имамо $2 \cdot k + m$, условних једначина где је непознато:

z_0 - реакција ослонаца C_{oi}

z_u - момената укљештења C_{ui}

z_s - сила S_{ik}

$z_k + m$ - момената M_{ik} и M_{ki}

$n = \sum z - (2 \cdot k + m)$ - број статичких непознатих величина.

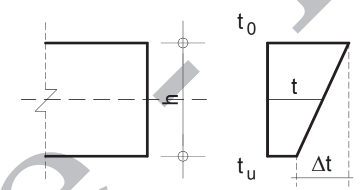
Једначина статичке неодређености, гласи:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \cdot X_j + \delta_{i\otimes} = 0\ , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

први члан једначине је: $$\delta_{ij} = \int_s \frac{M_i \cdot M_j}{E \cdot I} \cdot ds + \int_s \frac{N_i \cdot N_j}{E \cdot F} \cdot ds + k \cdot \int_s \frac{T_i \cdot T_j}{G \cdot F} \cdot ds$$

други члан једначине је: $$\delta_{i\otimes} = \delta_{i0} + \delta_{it} + \delta_{ic}$$

где је: $$\delta_{i0} = \int_s \frac{M_i \cdot M_0}{E \cdot I} \cdot ds + \int_s \frac{N_i \cdot N_0}{E \cdot F} \cdot ds + k \cdot \int_s \frac{T_i \cdot T_0}{G \cdot F} \cdot ds$$



$$\Delta t = t_u - t_o,$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot (t_u + t_o)$$

$$\delta_{it} = \int_s M_i \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot ds + \int_s N_i \cdot \alpha_t \cdot t \cdot ds$$

$$\delta_{ic} = -\sum_{j=1}^{z_0} C_{ij} \cdot c_j$$

У матричном облику систем једначина је: $[D] \cdot \{X\} + \{d\} = 0$, или

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}}_{[D]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}}_{\{X\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \delta_{1\otimes} \\ \delta_{2\otimes} \\ \vdots \\ \delta_{n\otimes} \end{Bmatrix}}_{\{d\}} = 0$$

где је: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, а, дијагонални чланови матрице $[D]$ су:

$$\delta_{ii} = \int_s \frac{M_i^2}{E \cdot I} \cdot ds + \int_s \frac{N_i^2}{E \cdot F} \cdot ds + k \cdot \int_s \frac{T_i^2}{G \cdot F} \cdot ds\ , \qquad \delta_{ii} > 0$$

Тако да се коначни дијаграми пресечних сила одређују суперпозицијом утицаја:

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot X_j \,, \qquad T = T_0 + \sum_{j=1}^{n} T_j \cdot X_j \,, \qquad N = N_0 + \sum_{j=1}^{n} N_j \cdot X_j$$

M_0, T_0, N_0 - су силе у пресецима основног система када је $X_j = 0$ и $p_j = 0$

M_j, T_j, N_j - су силе у пресецима основног система када је $p_j = 0$, а $X_j = 1.0$

Основни систем добијамо из статички неодређеног носача уклањањем прекобројних елемената (реакција, момената укљештења, сила унутрашњих веза) при чему је систем статички одређен.

Кратак преглед активности при прорачуну статички неодређених носача:

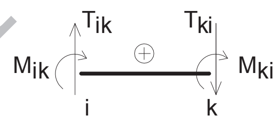
1. Одређивање броја статички неодређених величина,
2. Усвајање основног система,
3. Срачунавање редукованих величина (L^{I}_{ik}) и (L^{II}_{ik}),
4. Цртање дијаграма: $M_0, T_0, N_0, \alpha_t \cdot \dfrac{\Delta t}{h}, \alpha_t \cdot t, C_j$
5. Цртање дијаграма: M_i, T_i, N_i , за стање $X_i = 1.0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,
6. Прорачун коефицијената уз статичке непознате величине δ_{ij} или $EI_c\delta_{ij}$,
7. Прорачун слободних чланова $\delta_{io}, \delta_{it}, \delta_{ic}$ или $EI_c\delta_{i0}$; $EI_c\delta_{it}$; $EI_c\delta_{ic}$,
8. Решавање система једначина,
9. Цртање дијаграма утицаја M, T, N.

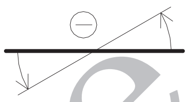
Дијаграм утицаја Т – сила трамо на основу коначног дијаграма момената, према релацији:

$$T_{ik} = T^{o}_{ik} \pm \frac{M_{ki} - M_{ik}}{L_{ik}}$$

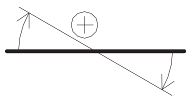
T^{o}_{ik} - реакција од спољашњег оптерећења

Усвојена конвенција о позитивним вредностима:





штап се обрће према М – дијаграму



Дијаграм утицаја N – сила трамо из услова равнотеже сила за сваки чвор носача понаособ.

$$\sum N = 0, \quad \sum V = 0 \,.$$

Уколико је систем састављен од штапова различитих попречних пресека, усвајамо упоредне вредности геометријских карактеристика, а потом долазимо до редукованих дужина, на следећи начин:

$$\delta_{ij} = \int_s \frac{M_i \cdot M_j}{E \cdot I} \cdot ds + \int_s \frac{N_i \cdot N_j}{E \cdot F} \cdot ds + k \cdot \int_s \frac{T_i \cdot T_j}{G \cdot F} \cdot ds \qquad / E \cdot I_c$$

$$EI_c \cdot \delta_{ij} = \int_s M_i \cdot M_j \frac{E \cdot I_c}{E \cdot I} \cdot ds + \int_s N_i \cdot N_j \frac{E \cdot I_c}{E \cdot F} \cdot ds + k \cdot \int_s T_i \cdot T_j \frac{E \cdot I_c}{G \cdot F} \cdot ds$$

веза из Отпорности материјала : $\frac{E}{G}=2+\nu$

$$EI_c\cdot\delta_{ij}=\int_s M_i\cdot M_j\frac{I_c}{I}\cdot ds+\int_s N_i\cdot N_j\frac{I_c}{F}\cdot ds+k\cdot(2+\nu)\cdot\int_s T_i\cdot T_j\frac{I_c}{F}\cdot ds$$

множимо израз са односом $\frac{F_c}{F_c}$, где је F_c усвојена упоредна површина, тј.:

$$EI_c\cdot\delta_{ij}=\int_s M_i\cdot M_j\frac{I_c}{I}\cdot ds+\frac{I_c}{F_c}\cdot\int_s N_i\cdot N_j\frac{F_c}{F}\cdot ds+k\cdot(2+\nu)\cdot\frac{I_c}{F_c}\cdot\int_s T_i\cdot T_j\frac{F_c}{F}\cdot ds$$

Долазимо до редукованих дужина: за моменте, $L^{I}_{ik}=\frac{I_c}{I}\cdot L_{ik}$, за пресечне силе, $L^{II}_{ik}=\frac{F_c}{F}\cdot L_{ik}$

Одређивање померања код статички неодређених раванских носача

Општи израз је:

$$\delta_j=\underbrace{\int_s\frac{M\cdot\bar{M}_j}{EI}\cdot ds+\int_s\frac{N\cdot\bar{N}_j}{EF}\cdot ds+k\cdot\int_s\frac{T\cdot\bar{T}_j}{GF}\cdot ds}_{\delta_{j0}}+\underbrace{\int_s\bar{M}_j\cdot\alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{h}\cdot ds+\int_s\bar{N}_j\cdot\alpha_t\cdot t\cdot L}_{\delta_{jt}}-\underbrace{\sum_i\bar{C}_{ij}\cdot c_j}_{\delta_{jc}}$$

за избор генералисаног померања $\bar{P}_j=1.0$, утицаји су:

$$\bar{M}_j=\bar{M}_{j0}+\bar{X}_1\cdot\bar{M}_1+\bar{X}_2\cdot\bar{M}_2+\ldots+\bar{X}_n\cdot\bar{M}_n$$
$$\bar{T}_j=\bar{T}_{j0}+\bar{X}_1\cdot\bar{T}_1+\bar{X}_2\cdot\bar{T}_2+\ldots+\bar{X}_n\cdot\bar{T}_n$$
$$\bar{N}_j=\bar{N}_{j0}+\bar{X}_1\cdot\bar{N}_1+\bar{X}_2\cdot\bar{N}_2+\ldots+\bar{X}_n\cdot\bar{N}_n$$

где су:

$\bar{N}_{j0},\bar{T}_{j0},\bar{M}_{j0}$ – силе у пресецима произвољног основног система (статички одређеног носача).

На тај начин имамо, да је:

$$\delta_j=\int_s\frac{M\cdot\bar{M}_{j0}}{EI}\cdot ds+\int_s\frac{N\cdot\bar{N}_{j0}}{EF}\cdot ds+k\cdot\int_s\frac{T\cdot\bar{T}_{j0}}{GF}\cdot ds+\bar{X}_1\cdot\cancel{\left(\int_s\frac{M\cdot\bar{M}_1}{EI}\cdot ds+\int_s\frac{N\cdot\bar{N}_1}{EF}\cdot ds+k\cdot\int_s\frac{T\cdot\bar{T}_1}{GF}\cdot ds\right)}+$$
$$+\bar{X}_2\cdot\cancel{\left(\int_s\frac{M\cdot\bar{M}_2}{EI}\cdot ds+\int_s\frac{N\cdot\bar{N}_2}{EF}\cdot ds+k\cdot\int_s\frac{T\cdot\bar{T}_2}{GF}\cdot ds\right)}+\ldots+\bar{X}_n\cdot\cancel{\left(\int_s\frac{M\cdot\bar{M}_n}{EI}\cdot ds+\int_s\frac{N\cdot\bar{N}_n}{EF}\cdot ds+k\cdot\int_s\frac{T\cdot\bar{T}_n}{GF}\cdot ds\right)}$$

Тако да је израз за одређивање померања код статички неодређених носача:

- од сталног и повременог оптерећења:

$$\delta_{j0}=\int_s\frac{M\cdot\bar{M}_{j0}}{EI}\cdot ds+\int_s\frac{N\cdot\bar{N}_{j0}}{EF}\cdot ds+k\cdot\int_s\frac{T\cdot\bar{T}_{j0}}{GF}\cdot ds$$

- од деловања разлике температуре:

$$\delta_{j\Delta t}=\int_s\frac{\bar{M}_{j0}\cdot M_{\Delta t}}{EI}\cdot ds+EI\cdot\int_s\bar{M}_{j0}\cdot\alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{h}\cdot ds$$

- од деловања температуре у оси штапа:

$$\delta_{jt}=\int_s\frac{\bar{M}_{j0}\cdot M_t}{EI}\cdot ds+\int_s\bar{N}_{j0}\cdot\alpha_t\cdot t\cdot ds$$

- од померања ослонаца и обртања укљештења:

$$\delta_{jc}=\int_s\frac{\bar{M}_{j0}\cdot M_c}{EI}\cdot ds-\sum_i\bar{C}_{ij0}\cdot c_j$$

Мр Илија М. МИЛИЧИЋ, дипл.инж.грађ.
milicic@gf.su.ac.yu

Одређивање утицајних линија код статички неодређених раванских носача

За реакције и пресечне силе:

$$[D]\cdot\{X\}+\{d\}=0$$

$$\{X\}=[-D]^{-1}\cdot\{d\} \qquad [D]^{-1}=[\beta_{ik}]$$

$$X_k=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}\cdot\delta_{io} \qquad k=1,2,\ldots,n$$

$\delta_{i0}=\delta_{0i}$, помераља услед $X_i=1.0$

Утицајне линије за реакције и силе у пресецима налазимо принципом суперпозиције утицаја:

$$Z=Z_0+\sum_{k=1}^{n}Z_k\cdot X_k$$

где је:

Z_0 – утицајна линија за утицај (Z) у статички одређеном носачу – основном систему,

Z_k – вредност утицаја (Z) у основном систему при стању $X_k=1.0$,

X_k – утицајна линија за статички неодређену величину.

или,

$$Z=Z_0-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}Z_k\cdot\beta_{ki}\cdot\delta_{i0}$$

$$\gamma_i=-\sum_{k=1}^{n}Z_k\cdot\beta_{ki}$$

$$Z=Z_0+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\cdot\delta_{i0}$$

За померања и обртања:

$$\delta=\delta_0+\sum_{k=1}^{n}\delta_k\cdot X_k$$

где је:

δ_0 – утицајна линија за померање у статички одређеном носачу,

δ_k – вредност померања за $X_k=1.0$,

X_k – утицајна линија за статички неодређену величину.

2. РЕШЕТКАСТИ НОСАЧИ

За решеткасти носач, чији штапови примају само аксијалне силе, принцип виртуалних сила написан за унутрашње равнотежно стање $X_i=1.0$, гласи:

$$\sum C_{ji}\cdot c_j=\int_s N_i\cdot\varepsilon\cdot ds=\sum_s N_i\cdot\int_s\varepsilon\cdot ds\,, \qquad \text{односно}$$

$$\sum C_{ji}\cdot c_j=\sum S_i\cdot\Delta L \tag{1}$$

док је стварна промена дужине штапа:

$$\Delta L=\frac{S\cdot L}{EF}+\alpha_t\cdot t\cdot L \tag{2}$$

S_i – аксијална сила у штапу при стању $X_i=1.0$

При чему је S стварна сила у штапу статички неодређеног система, услед неког утицаја, а гласи:

$$S=S_0+\sum_{k=1}^{n}X_k\cdot S_k \tag{3}$$

Ако (2) и (3) уврстимо у (1), имамо:

$$\underbrace{\sum_k X_k \cdot \left(\sum_s \frac{S_i \cdot S_k}{EF} \cdot L \right)}_{\delta_{ik}} + \underbrace{\sum_s \frac{S_i \cdot S_0}{EF} \cdot L}_{\delta_{i0}} + \underbrace{\sum_s S_i \cdot \alpha_t \cdot t \cdot L}_{\delta_{it}} - \underbrace{\sum_i C_{ij} \cdot c_j}_{\delta_{ic}} = 0$$

$$\delta_{i\otimes} = \delta_{i0} + \delta_{it} + \delta_{ic} \ ,$$

једначина статичке неодређености:

$$\sum_k \delta_{ik} \cdot X_k + \delta_{i\otimes} = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,k)$$

или у матричном облику:

$$[D] \cdot \{X\} + \{d\} = 0$$

Аксијална сила у штапу статички неодређеног решеткастог носача се одређује принципом суперпозиције утицаја:

$$S = S_0 + S_1 \cdot X_1 + S_2 \cdot X_2 + \dots + S_n \cdot X_n$$

Одређивање померања код статички неодређених решеткастих носача

Израз за одређивање померања код статички неодређених решеткастих носача су:

- од сталног и повременог оптерећења:

$$\delta_{j0} = \sum_s \frac{S \cdot \bar{S}_{j0}}{EF} \cdot L$$

- од деловања температуре у оси штапа:

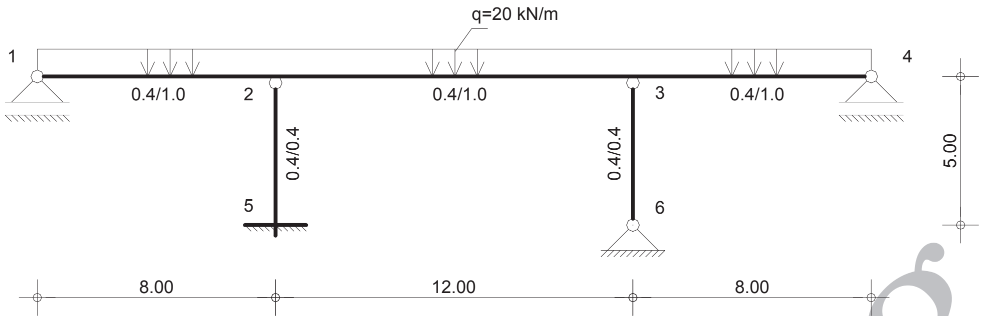
$$\delta_{jt} = \sum_s \frac{S_t \cdot \bar{S}_{j0}}{EF} \cdot L + \sum_s \bar{S}_{j0} \cdot \alpha_t \cdot t \cdot L$$

- од померања ослонаца и обртања укљештења:

$$\delta_{jc} = \sum_s \frac{S_c \cdot \bar{S}_{j0}}{EF} \cdot L - \sum_i \bar{C}_{ij0} \cdot c_j$$

ЗАДАТАК

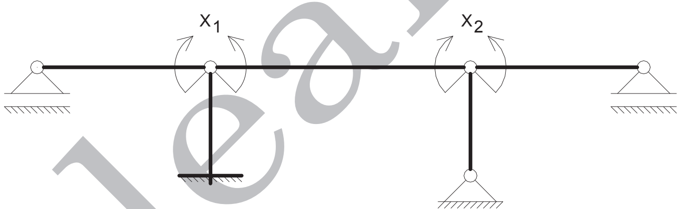
За носач са оптерећењем према скици нацртати дијаграме пресечних утицаја са ординатама на сваких 1.0 m. Утицај H, T – сила зенемарити на деформацију. $E = 3 \cdot 10^7 \, kN/m^2$.



Статичка неодређеност:

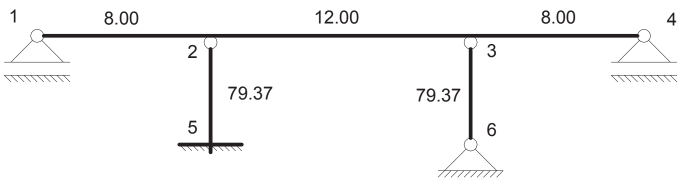
$z_u = 1$
$z_o = 6$
$z_k = 2$
$z_s = 5$
$k = 6.......2k = 12$
$n = \sum z - 2k = 14 - 12 = 2\,x$
неодређен систем

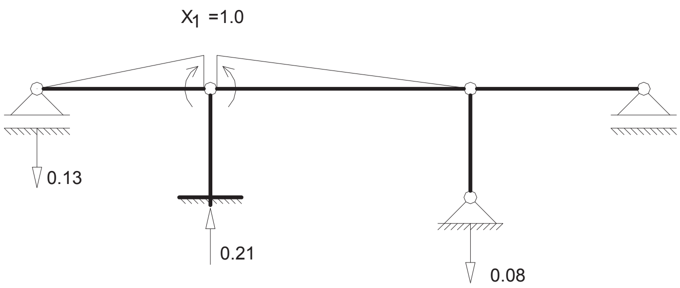
Основни систем



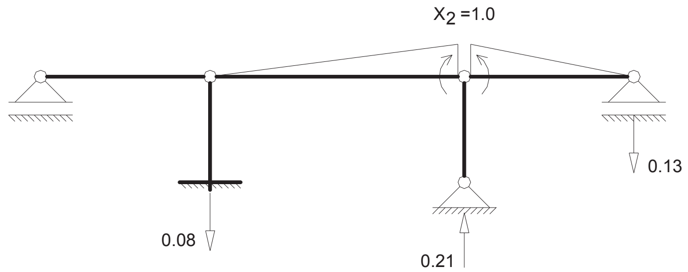
$$I_r = \frac{0.4 \cdot 1.0^3}{12} = 0.03\,m^4,\; I_s = \frac{0.4 \cdot 0.4^3}{12} = 0.0021\,m^4,\; I_c = I_r,\; L^I_{ik} = \frac{I_c}{I_{ik}} \cdot L_{ik}$$

Редуковане дужине штапова $L^I_{ik}\,[m]$

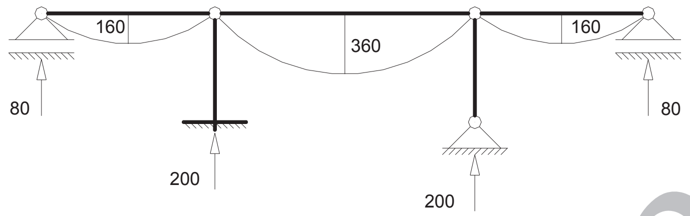




$M_1\,[kNm]$



$M_2\,[kNm]$



$M_0\,[kNm]$

Коефијенти уз непознате:

$$\delta_{11} = \frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 1.0\cdot 8.0 + \frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 1.0\cdot 12.0 = 6.6\dot{6}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{6}\cdot 1.0\cdot 1.0\cdot 12.0 = 2.00$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 1.0\cdot 12.0 + \frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 1.0\cdot 8.0 = 6.6\dot{6}$$

Слободни чланови:

$$\delta_{10} = -\frac{1}{3}\cdot 160\cdot 1.0\cdot 8.0 - \frac{1}{3}\cdot 360\cdot 1.0\cdot 12.0 = -1866.67$$

$$\delta_{20} = -\frac{1}{3}\cdot 360\cdot 1.0\cdot 12.0 - \frac{1}{3}\cdot 160\cdot 1.0\cdot 8.0 = -1866.67$$

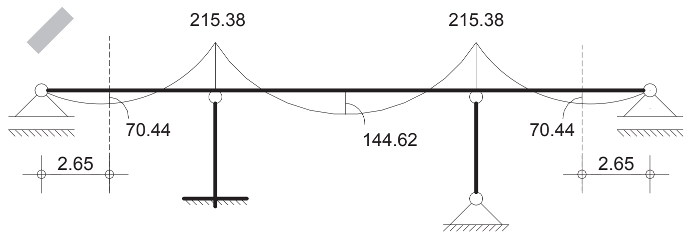
Систем једначина:

$$6.6\dot{6}\cdot X_1 + 2.0\cdot X_2 - 1866.67 = 0$$
$$2.0\cdot X_1 + 6.6\dot{6}\cdot X_2 - 1866.67 = 0$$

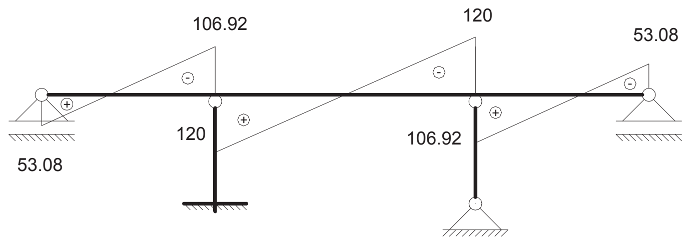
Решење:

$$X_1 = 215.38$$
$$X_2 = 215.38$$

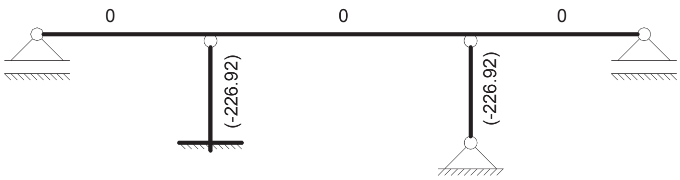
Дијаграми пресечних сила:



$M\,[kNm]$



$T\,[kN]$



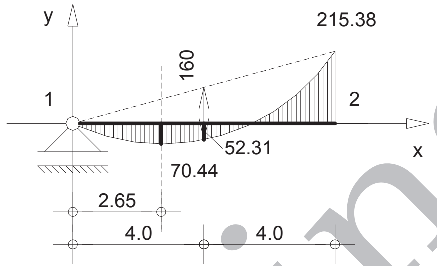
N[kN]

Вредности момената на сваких 1.0 m.

Штап 1 – 2., аналогно овом је штап 3 – 4.

Функција промене момента савијања је:

$y(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, па је:



1^0 $y(0)=0+0+c=0$

2^0 $y(4)=a\cdot 4^2+b\cdot 4=-52.31$

3^0 $y(8)=a\cdot 8^2+b\cdot 8=215.38$

Решења су: $a=10,\quad b=-53.08$

Функција промене момента је:

$$M(x)=10\cdot x^2-53.08\cdot x$$

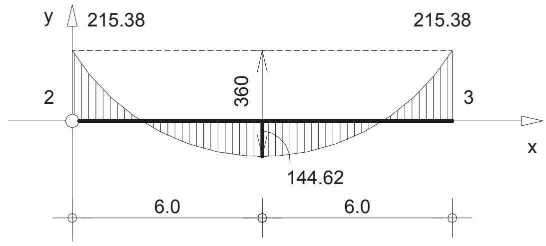
$$\frac{dM(x)}{dx}=20\cdot x-53.08=0$$

$$x=\frac{53.08}{20}=2.654$$

$$M(2.654)=-70.44\,kNm$$

x (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
M(x)	0	-43.08	-66.16	-69.24	-52.32	-15.40	41.52	118.44	215.38

Штап 2 – 3.



1^0 $y(0)=0+0+c=215.38$

2^0 $y(6)=a\cdot 6^2+b\cdot 6+c=-144.62$

3^0 $y(12)=a\cdot 12^2+b\cdot 12+c=215.38$

Решења су:
$a=10,\quad b=-120,\quad c=215.38$

Функција промене момента је:

$$M(x)=10\cdot x^2-120\cdot x+215.38$$

$$\frac{dM(x)}{dx}=20\cdot x-120=0$$

$$x=\frac{120}{20}=6.00$$

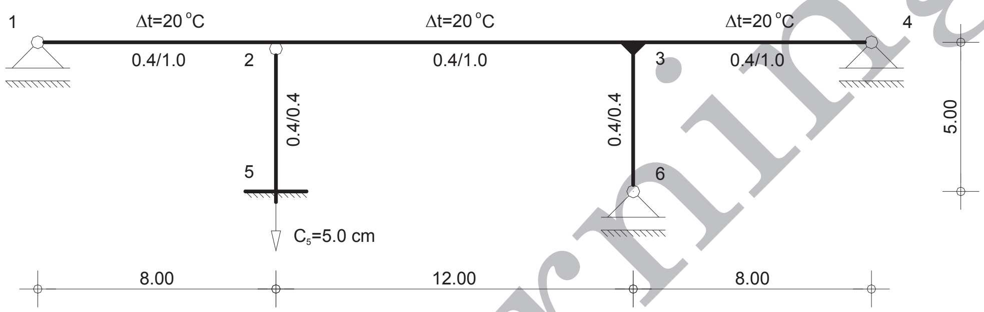
$$M(6.00)=-144.62\,kNm$$

x (m)	0	1	2	3	4	5	6	7,....12
M(x)	215.38	105.38	15.38	-54.62	-104.62	-134.62	-144.62	симетрично

ЗАДАТАК

1. За дати носач приказан на скици методом сила срачунати:
   - дијаграме M, T, N сила услед померања ослонца "5" за 5.0 cm, у вертикалном правцу,
   - вертикално померање средине штапа 2 – 3 услед померања "5" за 5.0 cm, у вертикалном правцу,
   - дијаграме M, T, N сила услед деловања температурне промене у штаповима потеза 1 – 2 – 3 – 4 за $\Delta t = 20^0 C$, $\alpha_t = 10^{-5} \frac{1}{^0C}$,
   - вертикално померање средине штапа 2 – 3 услед деловања температурне промене у штаповима потеза 1 – 2 – 3 – 4 за $\Delta t = 20^0 C$, $\alpha_t = 10^{-5} \frac{1}{^0C}$,

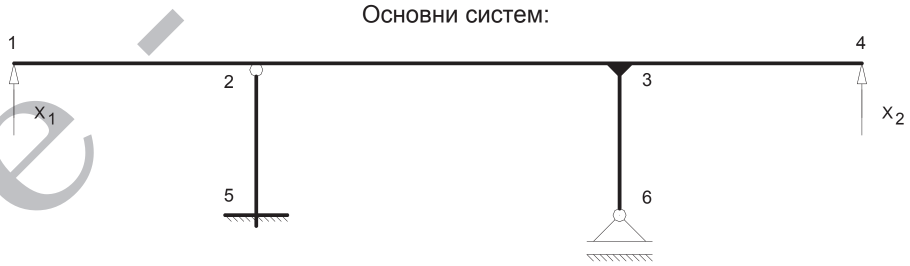
   E=3x10[7] kN/m[2]. Утицај N и T сила занемарити на деформацију !



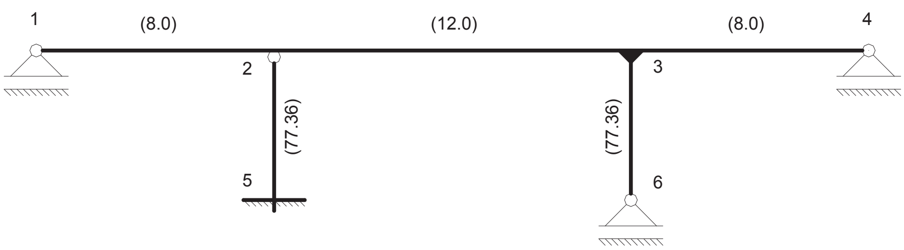
<u>**Статичка неодређеност:**</u>

$z_u = 1$
$z_o = 5$
$z_k = 3$
$z_s = 5$
$k = 6 ....2k = 12$
$n = \sum z - 2k = 14 - 12 = 2x$
неодређен систем

Основни систем:

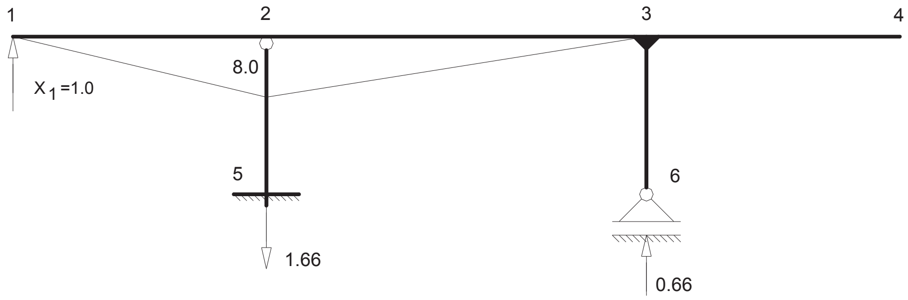


$L^I_{ik}\,[m]$ $\quad I_c = \frac{0.4 \cdot 1.0^3}{12} = 0.033 \quad L^I_{ik} = \frac{I_c}{I_{ik}} \cdot L_{ik}$

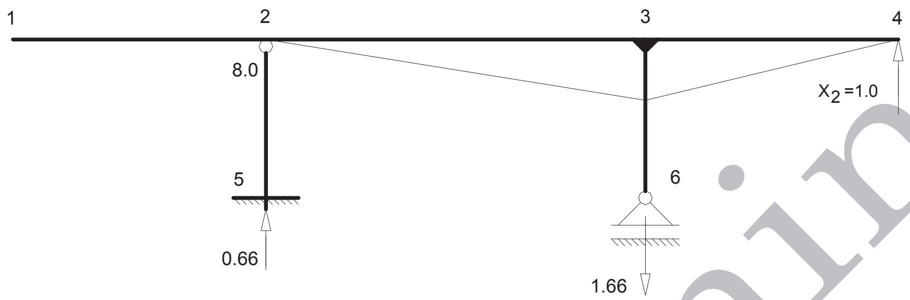


УТИЦАЈ: Померање ослонца "5" за 5.0 cm, у вертикалном правцу

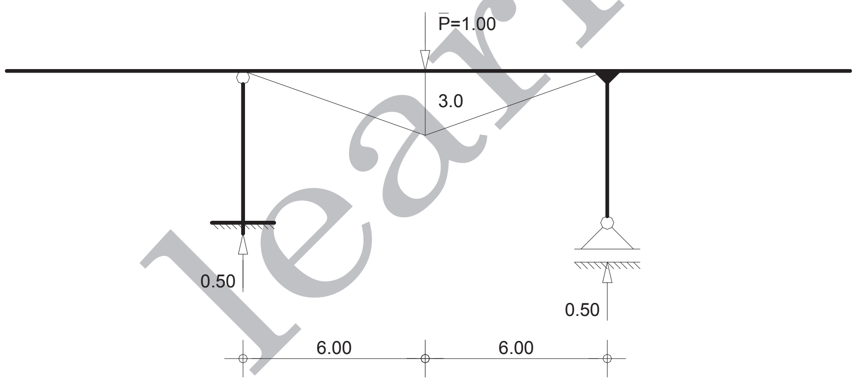
M_1 [kNm]



M_2 [kNm]



$\bar{M}_v$ [kNm]



Коефицијенти уз непознате:

$$\delta_{11} = \frac{1}{3}\cdot 8.0\cdot 8.0\cdot 8.0 + \frac{1}{3}\cdot 8.0\cdot 8.0\cdot 12.0 = 426.6\dot{6}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{6}\cdot 8.0\cdot 8.0\cdot 12.0 = 128.00$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3}\cdot 8.0\cdot 8.0\cdot 12.0 + \frac{1}{3}\cdot 8.0\cdot 8.0\cdot 8.0 = 426.6\dot{6}$$

Слободни чланови:

$$EI\cdot\delta_{1c} = -EI\cdot\sum_i C_i\cdot\bar{c}_i = -1.6\dot{6}\cdot 0.05 = -0.08\dot{3}$$

$$EI\cdot\delta_{2c} = -\left(-0.6\dot{6}\right)\cdot 0.05 = 0.03\dot{3}$$

Матрични облик система једначина:

$$\begin{bmatrix} 426.6\dot{6} & 128.00 \\ 128.00 & 426.6\dot{6} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} X_{1c} \\ X_{2c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.083 \\ -0.033 \end{Bmatrix}$$

Решење:

$X_{1c} = 0.0002393\cdot EI$

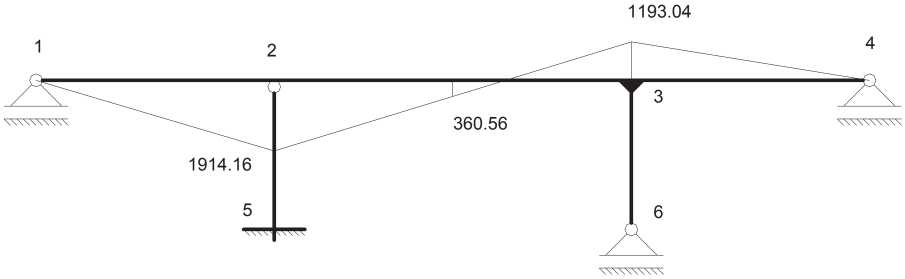
$X_{1c} = 239.27$

$X_{2c} = -0.0001491\cdot EI$

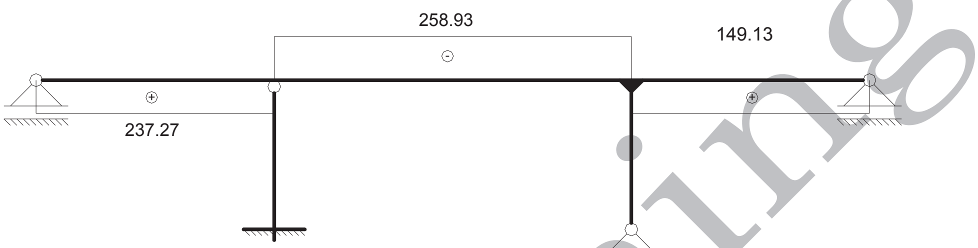
$X_{2c} = -149.13$

Дијаграми пресечних сила:

$M_c\left[kNm\right]$



$T_c\left[kN\right]$



$N_c\left[kN\right]$

Вертикално померање средине штапа 2 – 3 услед слегања ослонца "5"

$$\delta_{2-3}=\int_s \frac{M_c\cdot \bar{M}_v}{EI}\cdot ds-\sum_i \bar{C}_v\cdot c=\left[7305.84+\left(-1415.76\right)\right]-\left[\left(-0.50\right)\cdot 0.05\right]=0.031$$

$$\delta_{2-3}=31\,mm$$

УТИЦАЈ: Деловања температуре промене у штаповима потеза 1 – 2 – 3 – 4 за $\Delta t=20^0C$

Слободни чланови:

$$EI_c\cdot\delta_{1\Delta t}=EI_c\cdot\int_s M_1\cdot\alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{h}\cdot ds=10^6\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 8.0\cdot 8.0\cdot 10^{-5}\cdot\frac{20}{1.0}+\frac{1}{2}\cdot 8.0\cdot 12.0\cdot 10^{-5}\cdot\frac{20}{1.0}\right]=16000$$

$$EI_c\cdot\delta_{2\Delta t}=EI_c\cdot\int_s M_2\cdot\alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{h}\cdot ds=16000$$

Матрични облик система једначина:

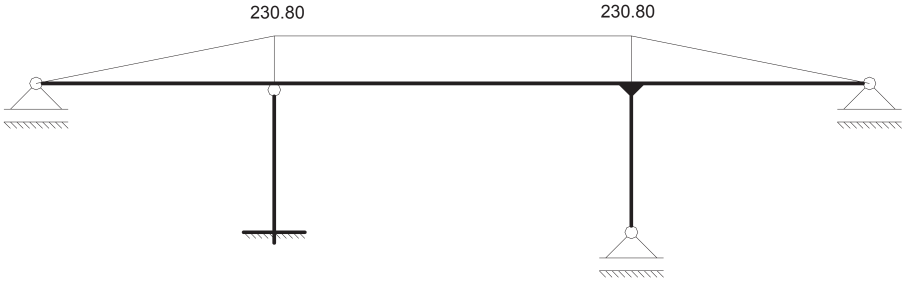
$$\begin{bmatrix}426.6\dot{6} & 128.00\\ 128.00 & 426.6\dot{6}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}X_{1\Delta t}\\ X_{2\Delta t}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-16000\\ -16000\end{Bmatrix}$$

Решење:

$$X_{1\Delta t}=-28.85$$
$$X_{2\Delta t}=-28.85$$

Дијаграми пресечних сила:

$M_{\Delta t}\,[kNm]$



$T_{\Delta t}\,[kN]$

$N_{\Delta t}\,[kN]$

Вертикално померање средине штапа 2 – 3 услед деловања температурне промене у штаповима потеза 1 – 2 – 3 – 4 за $\Delta t = 20^0 C$:

$$EI \cdot \delta_{(2-3)\Delta t} = \int_s M_{\Delta t} \cdot \bar{M}_v \cdot ds + EI \cdot \int_s \bar{M}_v \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot ds =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-230.80) \cdot 6.0 + 2 \cdot EI \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3.0 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6.0 \right) \right] = -554.40$$

$$\delta_{(2-3)\Delta t} = -\frac{554.40}{10^6} = -0.55\,mm$$

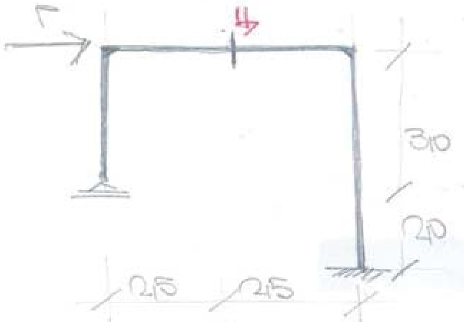
Мр Илија М. МИЛИЧИЋ, дипл.инж.грађ.
milicic@gf.su.ac.yu

* ЗАДАТАК

ОДРЕДИТИ ИНТЕНЗИТЕТ СИЛЕ „P" ТАКО ДА ПОМЕРАЊЕ ТАЧКЕ „Ц" БУДЕ $v_C = 3{,}0$ mm

ПОДАЦИ:

$EJ_c = 10 \cdot 10^3$ kNm^2

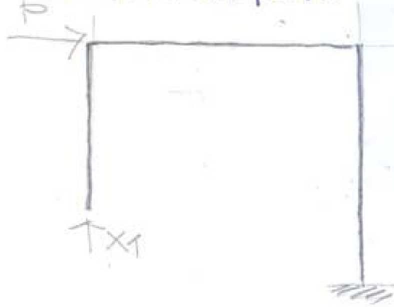


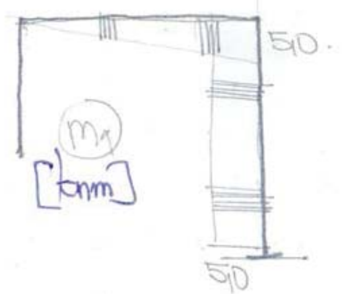
1 АНАЛИЗА СТАТИЧКЕ ОДРЕЂЕНОСТИ

$Z_O = 3$
$Z_U = 1$
$Z_K = 2 \quad k = 4$
$\Sigma Z = 3 \quad 2k = 8$

$n = 9 - 8 = 1\times$ ст. неодређен систем

ОСНОВНИ СИСТЕМ:





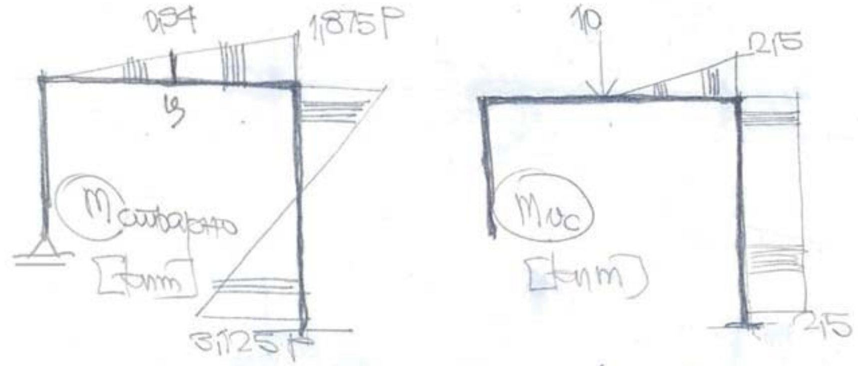
$EJ\delta_{10} = 62{,}5 \cdot P$
$EJ\delta_{11} = 166{,}67$

$X_1 = -\dfrac{62{,}5 \cdot P}{166{,}67} = 0{,}375 \cdot P$

$X_1 = -0{,}375 \cdot P$

$\delta_{11} = \dfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 = 166{,}6\dot{6}$

$\delta_{10} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5P \cdot 5 = 62{,}5P$



$EJ\, v_c = \dfrac{1}{6}(2 \cdot 1{,}875P + 0{,}94) \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 - \dfrac{1}{2}(-3{,}125P + 1{,}875P) \cdot 2{,}5 \cdot 5 = -2{,}927P$

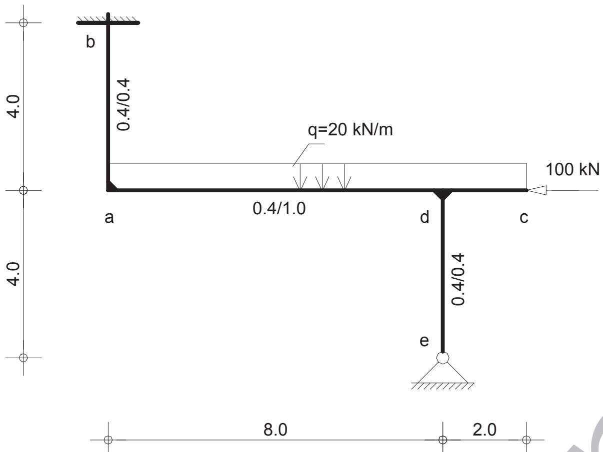
$10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}003 = -2{,}927P$

$P = \dfrac{0{,}003 \cdot 10 \cdot 10^3}{2{,}927} = -10{,}25$

* ТРАЖЕНА СИЛА ДА ЗАДОВОЉИ УСЛОВ ЈЕ: $P = -10{,}25$ kN

ЗАДАТАК

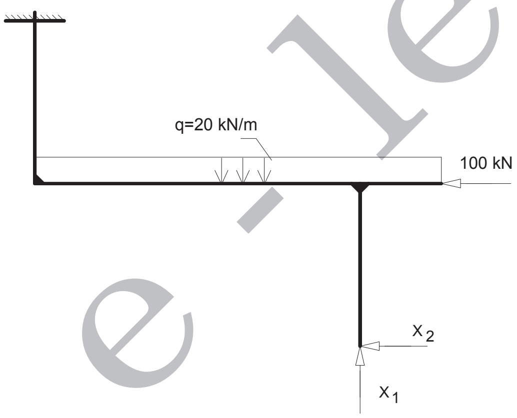
За носач приказан на скици срачунати укупно померање чвора "a" услед деловања задатог оптерећења. Утицај H, и T сила занемарити на деформацију. $E = 3 \cdot 10^7 kN/m^2$.



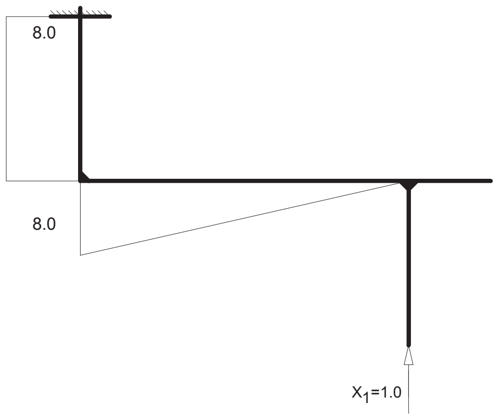
Статичка неодређеност:

$z_u = 1$
$z_o = 4$
$z_k = 3$
$z_s = 4$
$k = 5.......2k = 10$
$n = \sum z - 2k = 12 - 10 = 2x$
неодређен систем

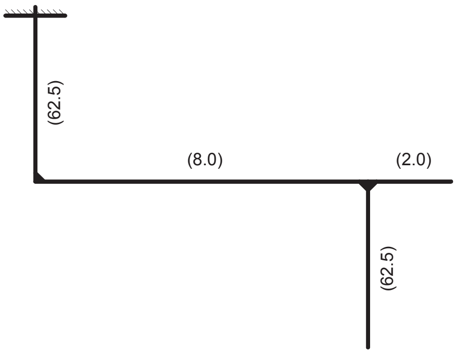
Основни систем:



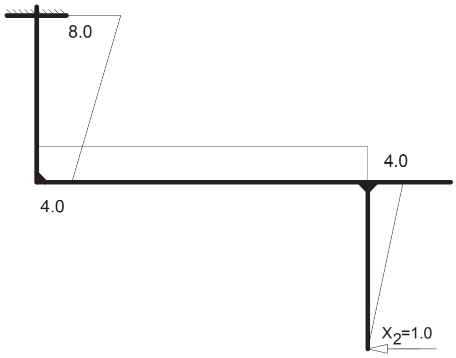
$M_1 [kNm]$



Редуковане дужине штапова $L^I_{ik} [m]$



$M_2 [kNm]$

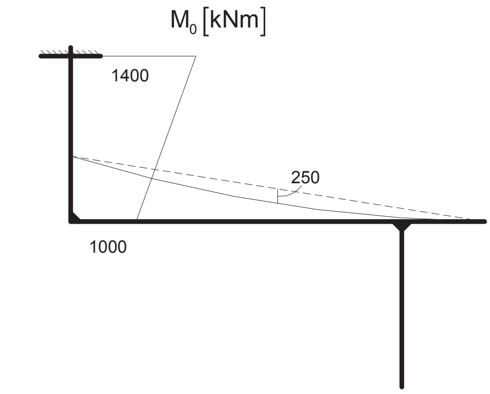


Коефицијенти уз непознате:

$$EI_c \cdot \delta_{11} = 2794.60$$
$$EI_c \cdot \delta_{22} = 4170.60$$
$$EI_c \cdot \delta_{12} = EI_c \cdot \delta_{21} = -3128.00$$

Слободни чланови:

$$EI_c \cdot \delta_{10} = 471560$$
$$EI_c \cdot \delta_{20} = -618346.\dot{6}$$

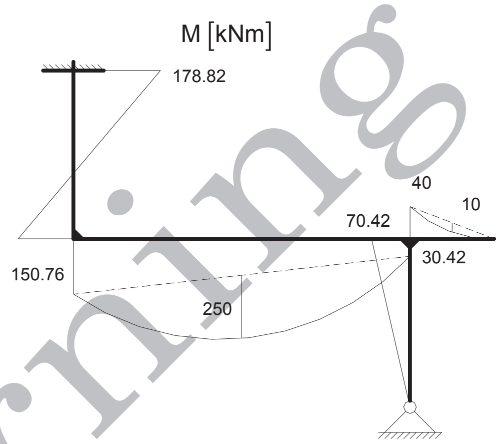


Матрични облик система једначина:

$$\begin{bmatrix} 2794.6 & -3128 \\ -3128 & 4172.\dot{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -471560.0 \\ 618346.\dot{6} \end{Bmatrix}$$

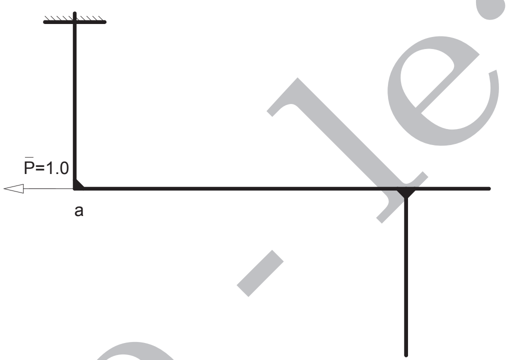
Решење:

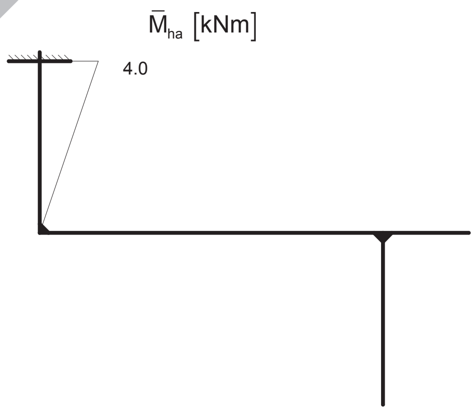
$$X_1 = -17.605$$
$$X_2 = 135.043$$



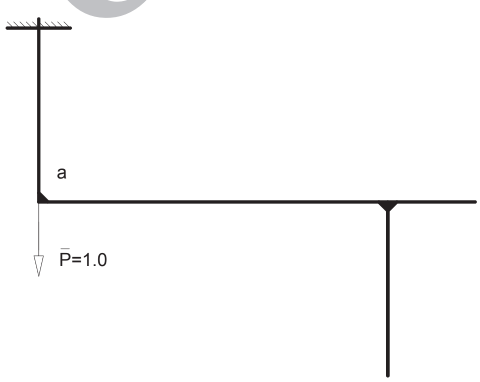
Укупно померање чвора "a"

Генералисана хоризонтална сила





Генералисана вертикална сила



хоризонтално померање:

$$h_a = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}_{ha}}{EI_c} = \frac{8619.50}{EI_c} = 8.62 \cdot 10^{-3} m$$

вертикално померање:

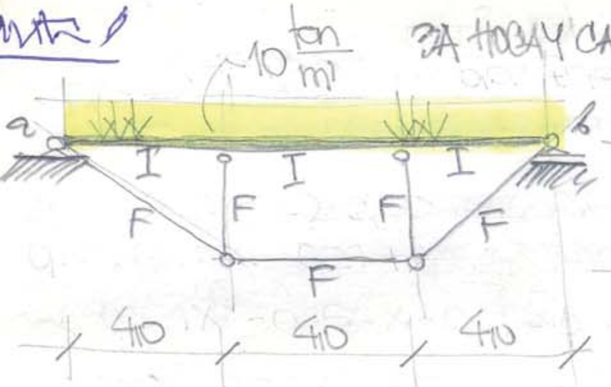
$$v_a = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}_{va}}{EI_c} = 0$$

Укупно померање:

$$\delta_a = \sqrt{h_a^2 + v_a^2} = \sqrt{8.62^2 + 0} = 8.62\,mm$$

ЗАДАТАК 1

За носач са оптерећењем према скици срачунати пресечне силе.



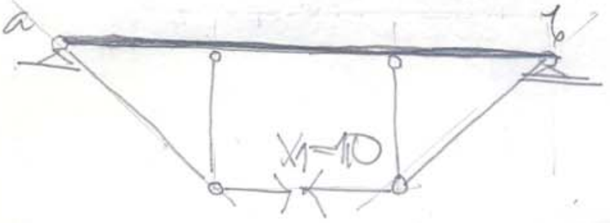
$Z_o = 3 \quad t = 6$

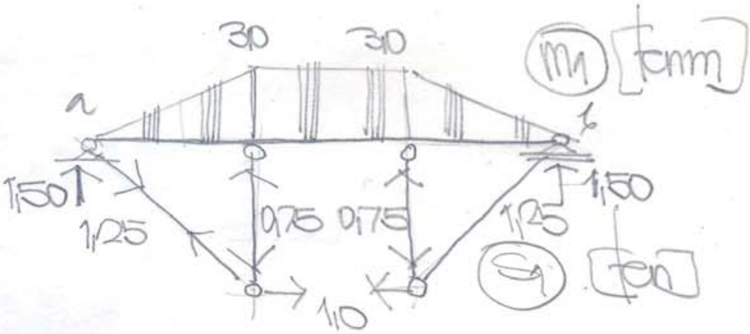
$Z_k = 2$

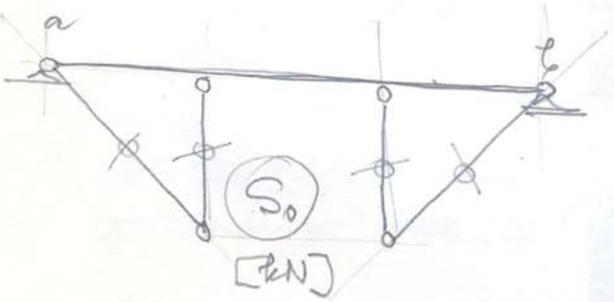
$Z_s = 8 \quad 2k = 12$

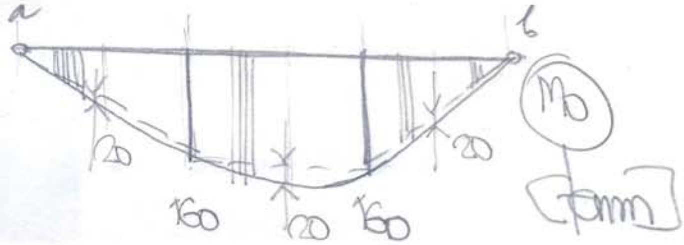
$\Sigma Z = 13 - 12 = 1$ x ст. неод.

* основни систем:





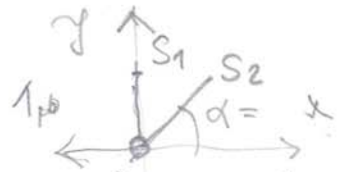




$\delta_{11} = 60 \qquad \delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$

$\delta_{10} = -3520 \qquad 60 \cdot X_1 - 3520 = 0$

$$X_1 = \frac{3520}{60} = 58{,}66$$



$\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\alpha = 36{,}87°$

$\sin\alpha = 0{,}6$

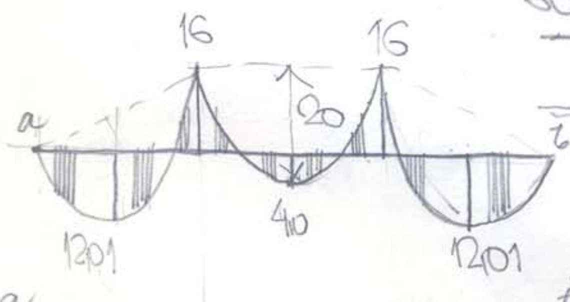
$\cos\alpha = 0{,}8$

$\Sigma X = 0: \ -1 + S_2 \cdot 0{,}8 = 0$

$S_2 = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$ kN

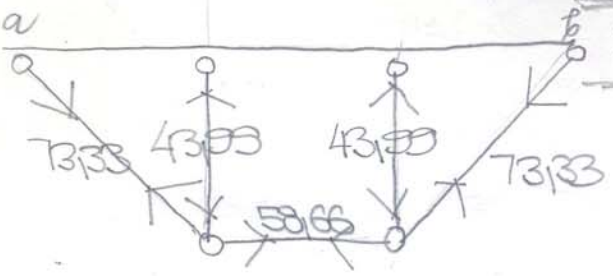
$\Sigma Y = 0: \ S_1 + S_2 \cdot 0{,}6 = 0$

$S_1 = -1{,}25 \cdot 0{,}6 = -0{,}75$



$M = M_0 + X_1 M_1$ ⊛

M [tm]



$S = S_0 + X_1 \cdot S_1$ ⊛

S [t]

само нови

$\Sigma X = 0: \ -58{,}66 + S_2 \cdot 0{,}8 = 0$

$$S_2 = \frac{58{,}66}{0{,}8} = 73{,}33 \text{ kN}$$

$\Sigma Y = 0: \ S_1 + S_2 \cdot 0{,}6 = 0$

$S_1 = -73{,}33 \cdot 0{,}6 = -43{,}99$ kN.

Ово је предност добро одабраног основног система